MA1 cvičení – limita funkce

Vypočítejte limity, nebo ukažte, že neexistují :

1. $\lim\limits_{x\to -3}(x+3)^2$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2-1}$; ; $\lim\limits_{x\to 2}\ln(x^2-3)$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\ln x+2}$;

   $\lim\limits_{x\to 2} x e^{x^2-3}$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} tg\, x$;

   Návod: funkce ve všech příkladech z a) jsou spojité v bodech, kde máme určit limitu, tedy zde $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

2. „Jednoduché“ limity:

   aritmetika limit „s nekonečnem“: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)^2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{(x+3)^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3x+1)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-3x+1)$;

   $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x+1)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x^2+1)$; ; $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2\cdot\ln x)$; $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{\ln x+2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x+2}$;

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x-1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x-1}$

   limity „typu $\dfrac{1}{0}$“ : $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{-1}{(x+3)^2}$; $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{-1}{x+3}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^x-1}$; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{\ln(x+2)}$;

   limity „typu $\dfrac{0}{0}$“ : $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{1-x^2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}$;

   limity „typu $\dfrac{\infty}{\infty}$“ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{3-x^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{3-x^2}$.

3. Trošku „těžší“ limity typu „$\dfrac{0}{0}$“, „$\dfrac{\infty}{\infty}$“, „$\infty-\infty$“ :

   $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$;

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$.

4. Limita složené funkce (zde $\exp(x)=e^x$) :

   $\lim\limits_{x\to 3}\exp\left(\dfrac{1}{3-x}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\exp\left(\dfrac{1}{3-x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to ?}\exp\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 1+}\ln(x^2-1)$;

   $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x^2-1)$; $\lim\limits_{x\to ?}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   Vysvětlení: ? v příkladech, kde je zadána $\lim\limits_{x\to ?}f(x)$, znamená výzvu – určete nejprve všechny body, kde je užitečné znát limitu dané funkce a pak limity funkce v těchto bodech spočítejte.

A pro další cvičení trošku těžší příklady limit složených funkcí (pokročilejší „čtenáři" mohou si počítat hned):

5*. Víme-li, že $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, spočítejte limity (nebo ukažte, že neexistují) :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$;
$\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)$.

6*. Víme-li, že $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, spočítejte limity, nebo ukažte, že neexistují :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$;
$\lim\limits_{x\to\infty} x\,(e^{\frac{1}{x}}-1)$; $\lim\limits_{x\to\infty} x\,(2^{\frac{1}{x}}-1)$ $\lim\limits_{x\to\infty} x\,\ln(1-\dfrac{2}{x})$.

b) Definujme $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$. Spočítejte $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$.

7. Užití věty o limitě sevřené funkce :
vypočítejte limity : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\sin x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\cos x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x(2+\sin x)$.

8*. Ukažte, že neexistují limity: $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1+\sin x)$.

9. Limity s cyklometrickými funkcemi $\arcsin x$, $arctg\,x$ (spočítejte limity, nebo ukažte, že neexistují):

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} arctg\,x$; $\lim\limits_{x\to-\infty} arctg\,x$; $\lim\limits_{x\to 0} arctg(\dfrac{1}{x^2})$; $\lim\limits_{x\to 0} arctg\,(\dfrac{1}{x})$; $\lim\limits_{x\to+\infty} arctg(\dfrac{1}{x})$; $\lim\limits_{x\to+\infty} arctg\,(\dfrac{x+1}{x-1})$;
$\lim\limits_{x\to 1} arctg(\dfrac{x+1}{x-1})$; $\lim\limits_{x\to 1+} arctg\,(\dfrac{x+1}{x-1})$; $\lim\limits_{x\to-\infty} arctg\,(\dfrac{x}{x^2-x})$; $\lim\limits_{x\to 0} arctg\,(\dfrac{x}{x^2-x})$;
$\lim\limits_{x\to 0+}\ln(arctg\sqrt{x})$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,x}{x}$; c ; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{arctg\,x}{x^2-x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{arctg\,x}{x^2-x}$; $\lim\limits_{x\to 0} x\,arctg\,(\dfrac{1}{x})$; $\lim\limits_{x\to\infty} x\,arctg\,(\dfrac{1}{x})$;
$\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$; $\lim\limits_{x\to ?} arctg\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

8*. Vyšetřete, zda lze v bodě $a = 0$ spojitě dodefinovat (a lze-li, tak dodefinujte) funkci f, která je pro $x \neq 0$ dána předpisem

a) $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$; b) $f(x) = \frac{\ln(4x^2+1)}{x^2}$; c) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$;

d) $f(x) = x\, arctg(\frac{1}{x})$; e) $f(x) = \frac{1}{x} arctg\, x$; f) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

Návod: Funkce $f(x)$ je podle definice spojitá v bodě $a = 0$, když platí, že $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$;

tedy, pokud má funkce $f(x)$ v bodě $a = 0$ vlastní limitu $\lim_{x\to 0} f(x) = L, L \in R$, když dodefinujeme funkci v bodě $a = 0$ touto limitou, tj. $f(0) = L$, bude funkce $f(x)$ v bodě $a = 0$ spojitá.

A pro „zájemce" – můžete si zkusit „důkazy" (řešení bude napsáno, ale zkuste si to dříve sami):

1*. Z definice limity ukažte:

a) $\lim_{x\to 2}(3x-2) = 4$; b) $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0$; c) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$; d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

2*. Ukažte, že platí:

(a) $\lim_{x\to c}|f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to c} f(x) = 0$

(b) Je-li $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ a funkce $g(x)$ je omezená v nějakém prstencovém okolí bodu c, pak i $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$.